

Στοχαστική ανάλυση και ανάλυση αξιοπιστίας κελυφών

Πρόγραμμα Βασικής Έρευνας «ΘΑΛΗΣ»

Γ. Στεφάνου, Δ. Χαρμπής, Μ. Παπαδρακάκης



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

Αριθμητική προσομοίωση στοχαστικών πεδίων Gauss

1. Η μέθοδος φασματικής απεικόνισης

$$f_{appr}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos(\omega_k x + \Phi_k)$$

- Προσομοίωση: ασυμπτωτικά στοχαστικό πεδίο Gauss για μεγάλο αριθμό όρων N λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος
- Επιτυχή προσομοίωση σε μη δομημένα πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων

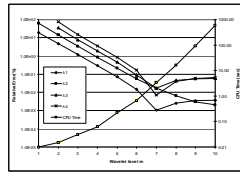
2. Η μέθοδος αναπτύγματος Karhunen-Loeve

$$\hat{f}(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \phi_n(x) \xi_n(\theta)$$

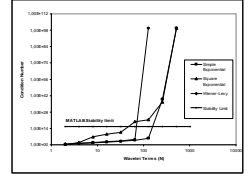
$$\int_D C_{ff}(x_1, x_2) \phi_n(x_1) dx_1 = \lambda_n \phi_n(x_2)$$

Ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm 2ου τύπου

- Αναλυτική λύση μόνο σε απλές γεωμετρίες και για ορισμένες μορφές της συνάρτησης αυτοδιακύμανσης C_{ff}
- Αριθμητική λύση Galerkin: Μητρώα πυκνής διάταξης (μεγάλο υπολογιστικό κόστος) → Επίλυση με χρήση κυματιδίων Haar (Haar wavelets) → κώδικας MATLAB



- ✓ Το σφάλμα στον υπολογισμό των ιδιοτιμών δεν μειώνεται πάντα με αύξηση του επιπέδου ανάλυσης m
- ✓ Σημαντικό υπολογιστικό κόστος σε υψηλά επίπεδα ανάλυσης $m=9-10$



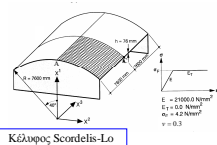
- ✓ Αριθμητικές αστάθειες που οφείλονται στη δομή του μητρώου κυματιδιακού μετασχηματισμού (μεγάλο δείκτης κατάστασης)
- ✓ Πιθανώς καλύτερη εικόνα με χρήση άλλου είδους κυματιδίων
- ✓ Περιορισμένη χρησιμότητα μεθόδου Karhunen-Loeve σε ρεαλιστικά προβλήματα

Στοχαστική ανάλυση και ανάλυση αξιοπιστίας κελυφών με τυχαίες μηχανικές και γεωμετρικές παραμέτρους

- Χρήση διδιάστατων ομογενών στοχαστικών πεδίων Gauss για την περιγραφή της διακύμανσης των αβέβαιων παραμέτρων (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, πάχος)
- Παραγωγή δειγματοσυνάρτησεων μέσω της μεθόδου φασματικής απεικόνισης
- Επιλογή της δομής συσχέτισης των πεδίων (φάσματος ισχύος)
- Στοχαστική ανάλυση με χρήση του τριγωνικού στοιχείου κελύφους TRIC και της προσομοίωσης Monte Carlo
- Υπολογισμός του συντελεστή διακύμανσης COV της απόκρισης (π.χ. μετατόπισης) στο χαρακτηριστικό σημείο C

$$COV(u_c) = \frac{\sigma(u_c)}{E(u_c)}$$

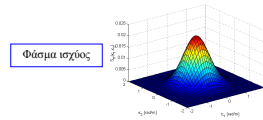
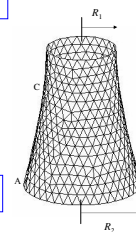
- Διερεύνηση της επιρροής διαφόρων παραμέτρων των πεδίων (τοπικής απόκλισης, δομής και κλίμακας συσχέτισης) στην απόκριση των κελυφών



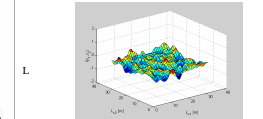
Κέλυφος Soredeis-Lo (~5.000 β.ε.)

$R_1 = 4800$ mm
 $R_2 = 8000$ mm
 $L = 20000$ mm
 $h = 40$ mm
 $E = 21000$ N/mm²
 $\nu = 0.25$

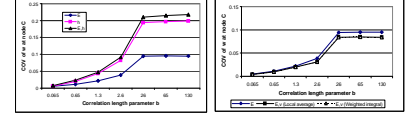
Υαμβολοειδές κέλυφος (~3.300 β.ε.)



$$S_f(x_1, x_2) = \sigma_f^2 \frac{b_1 b_2}{4\pi} \exp\left[-\left(\frac{b_1 x_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_2 x_2}{2}\right)^2\right]$$



Δειγματοσυνάρτηση του στοχαστικού πεδίου για $\sigma_f = 0.2, b_1 = b_2 = 2.6$



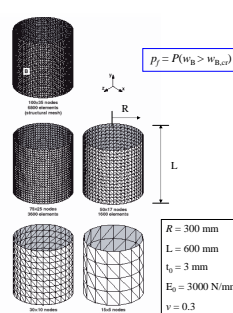
Αποτελέσματα - πρότυπα στοιχεία

- ✓ Διπίπωση του στοχαστικού μητρώου σφαιρότητας του στοιχείου TRIC ως συνάρτηση ενός μικρού αριθμού τυχαίων μεταβλητών
- ✓ Στατιστική σύγκλιση των αποτελεσμάτων σε 500-700 προσομοιώσεις Monte Carlo
- ✓ Σημαντική επιρροή της κλίμακας συσχέτισης (παραμέτρους b) στη διακύμανση της απόκρισης (μετατόπιση, τάση)
- ✓ Μικρή επιρροή της δομής συσχέτισης (φάσματος ισχύος) στη διακύμανση της απόκρισης
- ✓ Σημαντικότερη επιρροή της τυχαίας μεταβολής του πάχους στη διακύμανση της απόκρισης σε σχέση με αυτή του μέτρου ελαστικότητας
- ✓ Μικρή επιρροή της τυχαίας μεταβολής του λόγου του Poisson στα αποτελέσματα

Μείωση του υπολογιστικού κόστους της στοχαστικής ανάλυσης κελυφών με τυχαίες μηχανικές και γεωμετρικές παραμέτρους

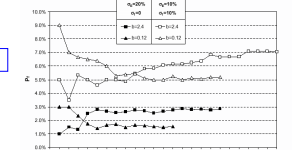
- Χρήση δύο διαφορετικών δικτύων για τη διακριτοποίηση του στοχαστικού πεδίου και του φορέα → Παραγωγή τιμών του στοχαστικού πεδίου σε ένα αραιό δίκτυο - «μεταφορά» των τιμών αυτών μέσω πολυωνυμικής παρεμβολής στο πυκνότερο δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων TRIC που χρησιμοποιείται για τη διακριτοποίηση του κελύφους
- Επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας με έναν αποτελεσματικό συνδυασμό επαναληπτικών (PCG) και άμεσων (Cholesky) μεθόδων
- Χρήση *παράλληλης* (parallel computing) στον χειρισμό της όλης ανάλυσης με την προσομοίωση Monte Carlo

- Θεώρηση τυχαίας διακύμανσης του μέτρου ελαστικότητας και του πάχους του κελύφους (ντετερμινιστική φόρτιση)
- Υπολογισμός της πιθανότητας αστοχίας p_f της κατασκευής (που ορίζεται ως η πιθανότητα μία συγκεκριμένη μετατόπιση να υπερβεί μία προεπιλεγμένη τιμή)

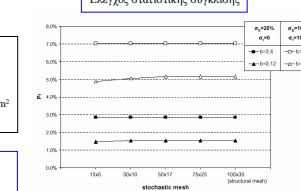


$R = 300$ mm
 $L = 600$ mm
 $t_0 = 3$ mm
 $E_0 = 3000$ N/mm²
 $\nu = 0.3$

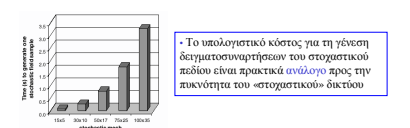
Ακτινικά συμπίεζόμενο κυλινδρικό κέλυφος



Έλεγχος στατιστικής σύγκλισης



Επιρροή της πυκνότητας του «στοχαστικού» δικτύου



Το υπολογιστικό κόστος για τη γένεση δειγματοσυνάρτησεων του στοχαστικού πεδίου είναι πρακτικά ανάλογο προς την πυκνότητα του «στοχαστικού» δικτύου

Αποτελέσματα - πρότυπα στοιχεία

- ✓ Θεματική μείωση του υπολογιστικού κόστους που απαιτείται για τη στοχαστική ανάλυση κελυφών με αβέβαιες παραμέτρους
- Στο εξεταζόμενο κυλινδρικό κέλυφος και για:
 - Τυχαία διακύμανση του μέτρου ελαστικότητας και του πάχους
 - 2400 ανάλυσεις (προσομοιώσεις Monte Carlo)
 - Χρήση του αραιού «στοχαστικού» δικτύου (15 x 5)
 - Επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας με τη μέθοδο PCG-K₀
 - Χρήση παράλληλης επεξεργασίας (δίκτυο 16 H/Y)
- Επιτεύχθηκε μείωση του υπολογιστικού χρόνου κατά ~ 2 τάξεις μεγέθους (από 14 ώρες σε 90 δευτερόλεπτα)

Άποψη - Ανακοινώσεις

1. G. Stefanou and M. Papadrakakis, Stochastic finite element analysis of shells with combined random material and geometric properties, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193, 139-160 (2004)
2. D. C. Charmpis and M. Papadrakakis, Improving the computational efficiency in finite element analysis of shells with uncertain properties, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Special Issue on Computational Methods in Stochastic Mechanics and Reliability Analysis 194(12-16), 1447-1478 (2005)
3. G. Stefanou, A. Kallimanis and M. Papadrakakis, On the efficiency of the Karhunen-Loeve expansion for the simulation of Gaussian stochastic fields, to be published in the Proceedings of ICOSAR 2005, June 19-23, 2005, Rome, Italy