

Επίλυση Προβλημάτων Μεικτού Μη Γραμμικού και Ακέραιου Προγραμματισμού με Χρήση Γενετικών Αλγόριθμων

Α. Νικολακόπουλος, Α. Αλεξανδρίδης, Α. Σπυρόπουλος, Χ Σαρίμβης (Ε.Υ.)



Σχολή Χημικών Μηχανικών ΕΜΠ

Σκοπός εργασίας – Κίνητρο

Μια μεγάλη γκάμα προβλημάτων της βιομηχανικής πρακτικής προτιμούνται να μαθηματικά μοντέλα Μικτού Ακέραιου Μη Γραμμικού Προγραμματισμού. Σε πολλές περιπτώσεις τα προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης που διαμορφώνονται είναι μη κενά (non convex) και η επίλυσή τους με γραμμαιστικά μέθοδους δεν αποδίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μεγάλο μέρος της ερευνητικής δραστηριότητας έχει στραφεί λοιπόν στην εφαρμογή στοχαστικών μεθόδων όπως είναι οι Γενετικοί Αλγόριθμοι.

Μαθηματικά μοντέλα προβλημάτων

Μοντέλα μεικτού ακέραιου και μη γραμμικού προγραμματισμού που περιέχουν ανισωτικούς ή και εξισωτικούς περιορισμούς (MINLP)

Μοντέλα μη γραμμικού προγραμματισμού που περιέχουν ανισωτικούς ή/και εξισωτικούς περιορισμούς (NLP)

$$\min f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad h_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0, l=1, \dots, M \quad g_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq 0, k=1, \dots, K$$

όπου \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των συνεχών μεταβλητών και \mathbf{z} είναι το διάνυσμα των ακέραιων μεταβλητών. Τυλιάζονται με από τις συναρτήσεις f, g, h είναι μη γραμμική.

$$\min f(\mathbf{x}) \quad h_k(\mathbf{x}) = 0, l=1, \dots, M \quad g_k(\mathbf{x}) \geq 0, k=1, \dots, K$$

όπου \mathbf{x} είναι το διάνυσμα των συνεχών μεταβλητών. Τυλιάζονται με από τις συναρτήσεις f, g, h είναι μη γραμμική.

Αποτελέσματα στοχαστικού Αλγόριθμου 1 σε MINLP προβλήματα

Ο Αλγόριθμος 1 βρίσκει πάντα το απόλυτο βέλτιστο και σε 100 επαναλήψεις του αλγόριθμου, χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 400 επαναλήψεις που αντιστοιχούν στο 9,7% του συνόλου των πιθανών λύσεων. Ο προγραμματισμός έγινε στο Matlab και ο μέσος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση του προβλήματος σε επεξεργαστή Pentium III 600 MHz ήταν 35s. Σε μεγαλύτερα προβλήματα η μέθοδος οδηγεί σε πολύ καλή λύση (κοντά στο όλο βέλτιστο) σε πολύ μικρό υπολογιστικό χρόνο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο Αλγόριθμος 1 χρησιμοποιείται για την επίλυση των μεικτών ακέραιων μεταβλητών σε προβλήματα Μικτού Ακέραιου και μη Γραμμικού Προγραμματισμού με σκοπό την βελτιστοποίηση των συνδυασμών που πρέπει να ερευνηθούν και επομένως του απαραίτητου υπολογιστικού χρόνου.

Επίλυση MINLP: Αλγόριθμος 1

Προκαταρκτικά βήματα:
1. Δημιουργία διανύσματος κατοφίλου. Επιλέγονται τυχαία $N+1$ διανύσματα τιμών \mathbf{z} ($\mathbf{z}_i, i=1, 2, \dots, N+1$) και επιλύονται τα $N+1$ αντίστοιχα NLP προβλήματα. Έστω $f_i, i=1, 2, \dots, N+1$ οι αντίστοιχες βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης. Το \mathbf{z}_i αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f_i και για τα υπόλοιπα υπολογίζουμε την ποσότητα $\frac{f_i - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$.
2. Δημιουργούμε το διάνυσμα κατοφίλου \mathbf{a} που αποτελείται από τα N διαφορετικά στοιχεία \mathbf{z}_i διατεταγμένα κατ' αύξουσα σειρά. Τα διανύσματα $\mathbf{z}_i, i=1, 2, \dots, N+1$ αποτελούν τις πρώτες γραμμές του πίνακα παραπροσέγγισης \mathbf{TL} .

Προκαταρκτικά βήματα

Οι περιορισμοί συγχωνεύονται με την αντικειμενική συνάρτηση:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^M a_l [h_l(\mathbf{x}) + p_l]^2 + \sum_{k=1}^K b_k [g_k(\mathbf{x}) + q_k]^2$$

όπου τα \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι πολλαπλασιαστές ποινής και τα \mathbf{p}, \mathbf{q} είναι πολλαπλασιαστές Lagrange

B1- Θέτουμε αρχικές τιμές για τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ και \mathbf{q}

B2- Με Εξελικτική Στρατηγική επιλύουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων, με σταθερά τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ και \mathbf{q} .

B3- Αν συμπληρωθεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων ο αλγόριθμος τερματίζεται. Διαφορετικά αναπροσαρμόζουμε τις τιμές των $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ και \mathbf{q} και επιστρέφουμε στο βήμα B2.

Επίλυση NLP: Αλγόριθμος 2

Εξελικτική Στρατηγική

Θέτουμε $iter = 0$

B1- Παράγουμε πληθυσμό M L τυχαίες λύσεις $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, L$

B2- $iter = iter + 1$. Αν $iter = maxiter$ ο αλγόριθμος τερματίζεται.

B3- Υπολογίζουμε την $f(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, L$

B4- Κατατάσσουμε τις λύσεις κατά φθίνουσα $f(\mathbf{x}_i)$: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L$ όπου το \mathbf{x}_i προηγείται του \mathbf{x}_j αν $f(\mathbf{x}_i) > f(\mathbf{x}_j)$

B5- Εφαρμόζουμε τελεστή διασταύρωσης στις $L-1$ πρώτες λύσεις $\mathbf{x}_{jnew} = \mathbf{x}_j + r(\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j)$ r τυχαίος αριθμός στο $[0, 1]$

$$\text{Αν } f(\mathbf{x}_{jnew}) < f(\mathbf{x}_{j+1}) \text{ τότε } \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{jnew}$$

B6- Κατατάσσουμε τις λύσεις όπως στο B4.

B7- Εφαρμόζουμε ανομοιομορφία μετάλλαξης στις λύσεις $i = 1, \dots, L$ με πιθανότητα:

$$p_{mut} = (L - i + 1)/L$$

B8- Αντικαθιστούμε την χειρότερη με την καλύτερη λύση. Επιστρέφουμε στο B2

Ρουτίνα αναπροσαρμογής των $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ και \mathbf{q}

Θέτουμε $iter = 0$. Επιλέγουμε τιμές για τις παραμέτρους W_1, W_2

B1- $iter = iter + 1$. Αν $iter = maxiter$ ο αλγόριθμος τερματίζεται

B2- Με την Εξελικτική Στρατηγική επιλύουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης της εξίσωσης $F(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$.

B3- Προσδιορίζουμε την μέγιστη παραβίαση των περιορισμών:

$$\max_k \left\{ \max_i |h_i(\mathbf{x}_i)|, \max_i |g_i(\mathbf{x}_i)| \right\}$$

και τους περιορισμούς που δεν βελτιώνεται η παραβίασή τους από τον πληθυσμό \mathbf{W}_i .

B4- Αν $cv_{max} > cv$: $a_m = a_m W_2, p_m = p_m W_2$ για όλα τα m του S_p και $b_k = b_k W_2, q_k = q_k W_2$ για όλα τα k του S_g

B5- Αν $cv_{max} < cv$: $cv = cv_{max}$, $p_m = h_m(\mathbf{x}_m) + p_m, q_k = \max(0, g_k(\mathbf{x}_m) + q_k)$. \mathbf{x}_m είναι η καλύτερη λύση που έχει βρεθεί

B6- Αν $cv_{max} = cv/W_1$: $a_m = a_m/W_2, p_m = p_m/W_2$ για $m = 1, \dots, M$ και $b_k = b_k/W_2, q_k = q_k/W_2$ για $k = 1, \dots, K$

Επιστρέφουμε στο B1.

Αποτελέσματα στοχαστικού Αλγόριθμου 2 σε NLP προβλήματα

	Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων	150	200	250	300	
Ex 1	Μεγλύτερο Μικρότερο Μέση τιμή Count STD	38.8503 38.1995 38.7447 38 0.13964	38.8503 38.1999 38.7847 56 0.10821	38.8503 38.4376 38.8167 70 0.0692	38.8503 38.5873 38.8185 83 0.07369	
	Ex 2	Μεγλύτερο Μικρότερο Μέση τιμή Count STD	-176.46 786.73 -186.00 6.6999	-181.25 -186.73 -186.46 76	-182.23 -186.73 -186.45 81	-180.21 -186.73 -186.56 89 0.6829

Ex.#	ΠΠ	Ακρίβης λύση	Αλγόριθμος 2	HNE-MUM-APP	TPEP	Hybrid EP	EP alone
3	HF	U	0.25000	0.25000	0.25000	0.83636	0.24510
	N	—	2250*	796*	4658	7667	5014
4	fin	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.50801	-5.42623	-5.51096
	Er	0	0.0	0.0	0.0	0.08178	diverged
5	fin	-6961.81388	-6961.81388	-6961.81388	-6961.81388	1033.13591	4392
	Er	0	0.0	0.0	0.0	diverged	8081
6	fin	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	Er	0	0.0	0.0	0.0	0.0	diverged
7	fin	0.05400	0.05400	0.05395	0.05400	diverged	diverged
	Er	0	0.0	0.0	0.0	diverged	diverged

Ex. 9	Αλγόριθμος 2	Static penalties	Dynamic penalties	Genocop II	Superiority of annealing point	Death penalty
Μεγλύτερο Μικρότερο Μέση τιμή	24.324	36.060	42.358	44.302	48.866	32.477
	24.306	24.690	25.486	18.917	17.388	25.653
	24.310	29.258	26.905	24.418	22.932	27.116

Ακρίβης λύση	Ex. 10	Ex. 11	Ex. 12	Exact Solution	Ex. 13	Ex. 14	Ex. 15
Αλγόριθμος 2	Largest	7.16129	6.613086	1600039.0	Proposed	44.0000	-1.8000
	Smallest	7.15286	6.608900	1599264.9	Algorithm	43.9688	-1.8000
	Average	7.15974	6.611581	1599828.8		43.9927	-1.8000
HGA	Largest	7.16085	6.61305	1600039.0		43.98178	-1.8000
	Smallest	7.14131	6.60297	1598842.2		35.8908	-2.38214
	Average	7.14926	6.60727	1599749.4		41.5932	-2.07616

Στους παραπάνω πίνακες φαίνεται τα αποτελέσματα του Αλγόριθμου 2 σε σύγκριση με απόλυτα άλλων αλγόριθμων της βιβλιογραφίας για όλα τα παραπάνω προβλήματα που παρουσιάζονται ανωτέρω. Όπως φαίνεται ο αλγόριθμος 2 βρίσκει τη βέλτιστη λύση στα περισσότερα προβλήματα ενώ πολλοί από τους άλλους αλγόριθμους δεν εντόπισαν τις βέλτιστες λύσεις ή ακόμα παραβιάζουν τους περιορισμούς. Επιπλέον τα παραγόμενα αποτελέσματα είναι διαθέσιμα σε λιγότερες, κατά κανόνα, αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, άρα σε μικρότερους υπολογιστικούς χρόνους. Οι ποικιλία των προβλημάτων αποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος 2 έχει σθεναρή συμπεριφορά και είναι αξιόπιστος.

MINLP προβλήματα

Στα πλαίσια της εργασίας, η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόστηκε στην επίλυση προβλημάτων αρτοποιίας παραγωγικών συστημάτων που αποτελούνται από περισσότερα του ενός στάδια παραγωγής και όπου παράγονται περισσότερα του ενός προϊόντα. Οι ακέραιες μεταβλητές δίνουν τον αριθμό των μονάδων διατεταγμένου έργου σε κάθε στάδιο της παραγωγής. Οι υπολοίπες μεταβλητές του προβλήματος είναι συνεχείς και δεξιάς. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε πρόβλημα ανωφελές μετρίως κλίμακας με έξι στάδια επεξεργασίας και με δυναμική επιλογή μιας έως τεσσάρων μονάδων για κάθε στάδιο. Το σύνολο των λύσεων αυτού του προβλήματος είναι $4^6 = 4096$.

NLP προβλήματα

Ex1. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex2. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex3. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex4. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex9. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex10. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex11. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex12. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex13. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex14. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Ex15. $\min_{x,y} 0.0001x^2 + 0.0001y^2 + 0.0001xy$
s.t. $x+y \leq 100$

Επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας

Ο αλγόριθμος 2 μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων μεγάλης κλίμακας. Μια τέτοια περίπτωση που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης που εμφανίζεται σε συστήματα ρύθμισης προβλεπτικού μοντέλου (Model Predictive Controllers, MPC).

Οι τεχνικές MPC βασίζονται στον παρακάτω συλλογισμό: Αν είναι διαθέσιμο ένα δυναμικό μοντέλο διακριτού χρόνου του συστήματος που συσχετίζει τις μεταβλητές εκ χειρισμού με τις ρυθμιζόμενες μεταβλητές, τότε μπορεί να διαμορφωθεί με βάση αυτό το μοντέλο ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σε πραγματικό χρόνο που να υπολογίζει τις βέλτιστες ρυθμιστικές κινήσεις, ελαχιστοποιώντας μια συνάρτηση κόστους. Από τις ρυθμιστικές αυτές κινήσεις υλοποιείται μόνο η πρώτη και στην επόμενη διακριτή χρονική στιγμή το πρόβλημα σχηματίζεται από την αρχή και επιλύεται ξανά.

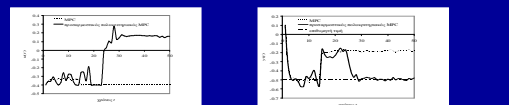
Ωστόσο τα προβλήματα βελτιστοποίησης που εμφανίζονται στις τεχνικές MPC είναι πολλές φορές πολύπλοκα, μη γραμμικά (σε περίπτωση που χρησιμοποιούμε μη γραμμικά μοντέλα) και μη κενά, γεγονός που κάνει δύσκολη την επίλυσή τους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που αντιμετωπίσαμε, η πολυπλοκότητα του προβλήματος αυξήθηκε, θεωρώντας ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι πολυκριτηριακό.

Συννοήθησαν λοιπόν, ο αλγόριθμος 2 εφαρμόστηκε για την επίλυση ενός πολυκριτηριακού μη γραμμικού μη κενού προβλήματος βελτιστοποίησης που διαμορφώθηκε εκ νέου σε κάθε χρονική στιγμή. Με τον τρόπο αυτό προέκυψε μια νέα μεθοδολογία MPC που δοκιμάστηκε με επιτυχία σε συστήματα όπου παρατηρούνται απότομες μεταβολές στη δυναμική συμπεριφορά αλλά και σε συστήματα που περιέχουν πολλαπλές μεταβλητές εισόδου και εξόδου.

Παράδειγμα I: Ρύθμιση συστήματος μιας εισόδου – μιας εξόδου (SISO) με μεταβολή στη δυναμική

Στο παράδειγμα αυτό στόχος είναι η ρύθμιση ενός συστήματος μιας εισόδου – μιας εξόδου, στην περίπτωση που η δυναμική του συστήματος μεταβάλλεται με το χρόνο. Ως μέθοδος ρύθμισης θα χρησιμοποιηθεί μια μεθοδολογία MPC στα πλαίσια της οποίας ο αλγόριθμος 2 καλείται να επιλύει ένα μη γραμμικό μη κενό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

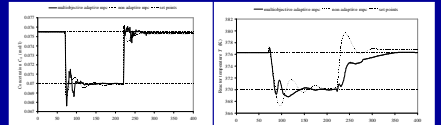
Αρχικά δίνουμε μια αλλαγή στην επιθυμητή τιμή της μεταβλητής εξόδου, ενώ στην συνέχεια κατά την χρονική στιγμή 15 μεταβάλλεται η δυναμική του συστήματος και ο αλγόριθμος καλείται να διατηρήσει την εξόδου όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή τιμή. Το πρώτο κριτήριο που υιοθετούμε είναι η απαίτηση για διαρκή διόρθωση και στην συνέχεια ελαχιστοποιείται η συνάρτηση που αφορά τη μεταβλητή εξόδου.



Μεταβλητή εισόδου Μεταβλητή εξόδου

Παράδειγμα II: Ρύθμιση συστήματος πολλαπλών εισόδου – πολλαπλών εξόδων (MIMO)

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε να κάνουμε με ένα πολυμεταβλητό σύστημα και συγκεκριμένα ένα σύστημα δυο εισόδων – δυο εξόδων. Ο ρυθμιστής εδώ καλείται να οδηγήσει ταχύτητα και τις δύο μεταβλητές εξόδου στην αντίστοιχη επιθυμητή τιμή.



Μεταβλητή εξόδου 1 Μεταβλητή εξόδου 2

Και στα δύο παραδείγματα αποδεικνύεται σωστή η επιλογή του εξελικτικού αλγόριθμου ως μέθοδο βελτιστοποίησης καθώς καταφέρνει να εντοπίζει τις τιμές εκείνες των μεταβλητών ελαχιστοποίησης ολόκληρο το σύστημα στην επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας. Είναι χαρακτηριστικό ότι στα παραπάνω προβλήματα οι κλασικές μεθοδολογίες βελτιστοποίησης που δοκιμάστηκαν δεν παράγαν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε αποδεκτό χρόνο.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ ΕΡΕΥΝΑΣ
1. Ιωάννης Α. Νικολακόπουλος, Γ. Μιχαήλ, Α. Κωνσταντίνος, "Η επίλυση προβλημάτων αρτοποιίας παραγωγικών συστημάτων", 4ο Πανεπιστημιακό Συνέδριο Χημικών Μηχανικών, 2003, Διπλωματικό.
2. Αλεξανδρίδης Α., Η. Σπυρόπουλος, Χ. Σαρίμβης, "Robustness of optimization algorithms using adaptive BFGM based network models", 14th Mediterranean Conference on Control and Automatic Medicine, Rhodes, Greece, 2003.
3. Αλεξανδρίδης Α., Η. Σπυρόπουλος, Χ. Σαρίμβης, "Adaptive control of continuous path following on a rigid body function neural network model", ESCAPE 11, Larnaca, Cyprus, 2003.
4. Σπυρόπουλος Α. Α. & Νικολακόπουλος Α. "A fast optimization algorithm for solving nonlinear constrained optimization problems", Computers and Operations Research, 32(6), 2005, 1099-1114.
5. Νικολακόπουλος Α. Α., Σαρίμβης Χ. Ι., Μιχαήλ Γ. Μ., "Αξιολόγηση αλγορίθμων επίλυσης προβλημάτων μικτού ακέραιου και μη γραμμικού προγραμματισμού σε πραγματική περίπτωση συστημάτων αρτοποιίας", 4ο Πανεπιστημιακό Συνέδριο Χημικών Μηχανικών, 2003, Διπλωματικό.